Pantelimon George Popescu
I.V. Maftei
José Luis Díaz-Barrero
Marian Dincă

INEGALITĂȚI MATEMATICE

Modele inovatoare

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ, R.A.

Cuprins

Capitolul 1

Cu privire la inegalităţi algebrice clasice

1.1 Inegalitatea mediilor

Inegalitatea mediilor este una dintre cele mai des utilizate inegalităţi din matematică, fiind cunoscută şi sub denumirea de inegalitatea lui Cauchy. Fiind foarte importantă, vom prezenta mai multe soluţii ale acestei inegalităţi.

Teorema 1.1.1. *Media aritmetică a n numere reale $a_1, a_2, ..., a_n > 0$, este mai mare sau egală decât media lor geometrică şi anume*

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}.$$

Demonstraţie. 1. Demonstrăm mai întâi că inegalitatea este adevărată pentru un număr n de forma $2^k (k \in \mathbb{N})$, folosind inducţia metematică. Fie acum $n \in \mathbb{N}$, iar k cel mai mic număr natural pentru care $n \leq 2^k$. Numerele $a_1, a_2, ..., a_n, g, g, ..., g$ (unde $g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$, şi apare de $2^k - n$ ori) sunt pozitive şi în număr de 2^k. Putem deci scrie

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n + (2^k - n)g}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n \cdot g^{2^k - n}}.$$

Însă $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n \cdot g^{2^k-n} = g^n \cdot g^{2^k-n} = g^{2^k}$. Obţinem deci inegalitatea

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n + (2^k - n)g}{2^k} \geq g$$

sau

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + 2^k \cdot g - n \cdot g \geq 2^k \cdot g$$

care este echivalentă în final cu $a_1+a_2+...+a_n \geq n \cdot g = n\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$, adică ceea ce trebuia demonstrat. ⊞

Demonstraţie. 2. Pentru $n = 1, 2$, inegalitatea se verifică uşor. Presupunem că ea este adevărată pentru $n-i$ numere pozitive ($1 \leq i \leq n-1$) şi să demonstrăm că ea rămâne adevărată şi pentru n numere pozitive $a_1, a_2, ..., a_n$. Conform ipotezei de inducţie putem scrie

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i \geq (n-1)\sqrt[n-1]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1}} \tag{1.1}$$

şi

$$a_n + (n-2)\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \geq (n-1)\sqrt[n-1]{a_n \cdot \left(\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}\right)^{n-2}} \tag{1.2}$$

Adunăm (1.1) cu (1.2), membru cu membru şi obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + (n-2)\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \geq (n-1)\sqrt[n-1]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1}}$$

$$+ (n-1)\sqrt[n-1]{a_n \cdot \left(\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}\right)^{n-2}} \tag{1.3}$$

Însă

$$\sqrt[n-1]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1}} + \sqrt[n-1]{a_n \cdot \left(\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}\right)^{n-2}}$$

$$\geq 2 \cdot \sqrt{\sqrt[n-1]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1}} \cdot \sqrt[n-1]{a_n \cdot \left(\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}\right)^{n-2}}}$$

$$= 2\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}.$$

Astfel din (1.3) deducem

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + (n-2)\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \geq 2(n-1)\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$$

sau $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq n\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

⊞

Demonstrație. 3. Notăm inegalitatea $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$ cu $P(n)$, pentru $n \geq 2$, şi arătăm prin inducţie matematică că $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, pentru $k \geq 2$, natural. Pentru început impunem condiţia ca $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$, condiţie care nu contrazice generalitatea inegalităţii. Se verifică uşor $P(2)$. Arătăm că $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, pentru orice $k \geq 2$, natural, ceea ce, revine la a demonstra inegalitatea

$$k\sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k} + a_{k+1} \geq (k+1)\sqrt[k+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{k+1}}.$$

În acest scop se aplică inegalitatea $k\sqrt[k]{x} + y \geq (k+1)\sqrt[k+1]{xy}$ cu condiţia ca $y > \sqrt[k]{x}$, unde $x, y > 0$. În cazul nostru $x = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$ şi $y = a_{k+1}$, iar condiţia cerută este verificată deoarece am impus la început o anumită ordine numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Deci am arătat că $P(k) \Rightarrow P(k+1), \forall k \geq 2, natural$, ceea ce încheie demonstraţia. ⊞

În continuare vom prezenta câteva comentarii privitoare la cazul de egalitate al inegalităţii mediilor, la inegalitatea dintre media ponderată şi media geometrică, precum şi despre o generalizare a inegalităţii mediilor.

Comentariu. (i). Cazul de egalitate dintre media aritmentică şi media geometrică se obţine pentru $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.
(ii). Inegalitatea dintre media armonică şi media geometrică (a n numere reale pozitive), mai precis:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^{-1},$$

nu este altceva decât inegalitatea dintre media geometrică şi media aritmetică (demonstrată mai sus), aplicată numerelor pozitive $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$.
(iii). O generalizare a inegalităţii mediilor este data de inegalitatea ponderată a mediilor, adică:

$$p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 + \ldots + p_n \cdot a_n \geq a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{p_n},$$

unde $p_1, p_2, \ldots, p_n, a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, iar $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, $\forall n \geq 2$. ⊕

1.2 Inegalitatea Cauchy - Buniakovski - Schwarz

Următoarea inegalitate este de asemenea una destul de generală, care, la rândul ei, este importantă şi frecvent utilizată.

Teorema 1.2.1. *Fie $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$, numere reale. Atunci*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2).$$

Demonstraţie. 1. O primă demonstraţie rezultă direct din identitatea lui *Lagrange*: Pentru orice numere reale $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$, avem relaţia

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} (a_ib_j - a_jb_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2.$$

Pentru demonstrarea acestei identităţi vom aplica inducţia matematică. Pentru $n = 1$ egalitatea este evidentă. Acum admitem că pentru orice numere reale $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$, avem:

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} (a_ib_j - a_jb_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2$$

Atunci

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n+1} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_ib_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \\
&+ b_{n+1}^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + a_{n+1}^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + a_{n+1}^2 \cdot b_{n+1}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \\
&- 2a_{n+1}b_{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_ib_i - a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 = \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_ib_j - a_jb_i)^2 \\
&+ b_{n+1}^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + a_{n+1}^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - 2a_{n+1}b_{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \\
&= \sum_{1\leq i<j\leq n+1} (a_ib_j - a_jb_i)^2,
\end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstraţia. (este uşor de observat ca în partea stângă a egalităţii avem o sumă de pătrate, deci un număr mai mare sau egal ca zero, ceea ce implică că şi membrul drept este pozitiv) ⊞

Demonstraţie. 2. O altă demonstraţie se obţine utilizând trinomul de gradul al doilea. Evident, $(a_jx-b_j)^2 \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $(1 \leq j \leq n)$, egalităţile realizându-se dacă şi numai dacă $x = \frac{b_j}{a_j}$. Însumând, obţinem:

$$x^2(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2) - 2x(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n) + (b_1^2+b_2^2+...+b_n^2) \geq 0,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, egalitatea realizându-se dacă şi numai dacă toate inegalităţile $(a_jx - b_j)^2 \geq 0$ se transformă în egalităţi pentru un acelaşi x. Rezultă că discriminantul trinomului este negativ sau zero (alternativa egalităţii cu zero realizându-se dacă şi numai dacă $b_j = xa_j$ pentru un anumit $x(1 \leq j \leq n)$), adică

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_jb_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right).$$

⊞

În continuare vom prezenta un comentariu despre cazul de egalitate al inegalităţii.

Comentariu. După cum s-a observat şi din demonstraţiile prezentate anterior, cazul de egalitate al inegalităţii cu pricina are loc dacă şi numai dacă există o constantă λ astfel ca $b_j = \lambda a_j$, pentru $j = 1, 2, ..., n$. ⊕

1.3 Inegalitatea lui Hölder

Continuăm cu o generalizare clasică a inegalităţii CBS şi anume

Teorema 1.3.1. *Fie $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n > 0$, $n \geq 2$ şi $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, atunci are loc inegalitatea*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i=1}^{n} a_ib_i.$$

Demonstraţie. 1. Începem prin a prezenta o demonstraţie prin inducţie. Considerăm adevărată inegalitatea pentru n şi o demonstrăm pentru $n+1$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + a_{n+1}b_{n+1} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} + a_{n+1}b_{n+1}$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p + a_{n+1}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q + b_{n+1}^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n+1} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Acum pentru ca inducţia să fie completă mai trebuie verificat cazul $n=2$, adică inegalitatea $a_1b_1+a_2b_2 \le (a_1^p+a_2^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q+b_2^q)^{\frac{1}{q}}$, inegalitate ce rezultă imediat din studiul semnului funcţiei:

$$f(x) = (a_1^p + a_2^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q + x^q)^{\frac{1}{q}} - a_1b_1 - a_2x, \ x > 0,$$

ceea ce încheie demonstraţia. ⊞

Demonstraţie. 2. Rescriem inegalitatea astfel

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}\right)^{\frac{1}{q}} \le 1.$$

Această inegalitate o vom demonstra cu ajutorul inegalităţii mediilor ponderate şi adică $x^{\frac{1}{\alpha}} y^{\frac{1}{\beta}} \le \frac{1}{\alpha}x + \frac{1}{\beta}y$. În cazul nostru avem:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}\right)^{\frac{1}{q}} \le \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{p}\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p} + \frac{1}{q}\frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}\right]$$

$$= \frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p} + \frac{1}{q}\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

adică ceea ce trebuia demonstrat. ⊞

Comentariu. (i). Egalitatea este stabilită dacă şi numai dacă n-uplele $(a_1^p, a_2^p, ..., a_n^p)$ şi $(b_1^p, b_2^p, ..., b_n^p)$ sunt proporţionale.
(ii). Se observă că pentru $p=q=2$ rezultă tocmai inegalitatea

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2),$$

adică celebra inegalitate Cauchy-Buniakovski-Schwarz.
(iii). O generalizare a inegalităţii o reprezintă tocmai inegalitatea Hölder ponderată

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i b_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}} \geq \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i,$$

unde $p_1, p_2, ..., p_n > 0$ şi $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. $\oplus$

1.4 Inegalitatea lui Minkovski

În aceeaşi categorie prezentăm şi următoarea inegalitate.

Teorema 1.4.1. *Dacă $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n > 0$, $n \geq 2$ şi p este un număr real cu $p > 1$, atunci are loc inegalitatea*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstraţie. Vom prezenta o demonstraţie bazată pe inegalitatea lui Hölder. Pentru $q = \frac{p}{p-1}$, evident $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Acum cu ajutorul inegalităţii lui Hölder vom obţine

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p &= \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i(a_i + b_i)^{p-1} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p\right)^{\frac{p-1}{p}},
\end{aligned}$$

şi înmulţind această inegalitate cu $\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p\right)^{-\frac{p-1}{p}}$ rezultă

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

adică ceea ce trebuia demonstrat. ⊞

Comentariu. (i). Inegalitatea devine egalitate dacă şi numai dacă $(a_1, a_2, ..., a_n)$ şi $(b_1, b_2, ..., b_n)$ sunt proporţionale.
(ii). Dacă $p < 1$ atunci inegalitatea îşi schimbă sensul.
(iii). O generalizare a inegalităţii o reprezintă tocmai inegalitatea lui Minkovski ponderată

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i(a_i+b_i)^t\right)^{\frac{1}{t}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^t\right)^{\frac{1}{t}} + \left(\sum_{i=1}^{n} p_i b_i^t\right)^{\frac{1}{t}},$$

unde $t > 1$, iar $p_1, p_2, ..., p_n > 0$. ⊕

1.5 Inegalitatea lui Bernoulli

Vom începe prin a prezenta o formă mai simplă a inegalităţii lui Bernoulli, adică

Teorema 1.5.1. *Dacă* $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset (-1, 0]$ *sau* $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset [0, \infty)$, *atunci*

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{1.4}$$

Demonstraţie. Prezentăm aici o demonstraţie prin inducţie. Notăm cu $P(n)$ inegalitatea pentru $n \in \mathbb{N}$. Evident P(1) este adevărată. Demonstrăm că $P(k) \Rightarrow P(k+1), k \geq 1, k \in \mathbb{N}$ şi avem

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{k}(1+a_i)\cdot(1+a_{k+1}) &\geq (1+\sum_{i=1}^{k} a_i)(1+a_{k+1}) \\
&= 1+\sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1} + a_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_i \\
&\geq 1+\sum_{i=1}^{k+1} a_i
\end{aligned}$$

deoarece $1 + a_{k+1} \geq 0$ şi $a_i \cdot a_{k+1} \geq 0, (1 \leq i \leq k)$. ⊞

Observaţie. Completăm demonstraţia prin condiţia pe care trebuie să o verifice numerele în cazul de egalitate şi anume trebuie ca $n-1$ din numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ să fie nule. ⊙

Prezentăm în continuare două dintre cele mai importante inegalităţi ale lui Bernoulli.

Teorema 1.5.2. *Fie $x > -1$, atunci*

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x, \text{ pentru } \alpha > 1 \text{ sau } \alpha < 0 \text{ si} \tag{1.5}$$

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x, \text{ pentru } 0 < \alpha < 1, \tag{1.6}$$

cazul de egalitate având loc dacă şi numai dacă $x = 0$.

Demonstraţie. Pentru demonstraţie vom studia semnul funcţiei $f(x) = (1+x)^\alpha - \alpha x, x > -1$. Funcţia $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha$ se anulează în zero. Pentru $\alpha > 1$ sau *alpha* < 0, avem că $f(x) \geq f(0) = 1$ cu egalitate pentru $x = 0$ şi (1.5) este demonstrată. În cazul când $0 < \alpha < 1$, f' îşi schimbă semnul, ceea ce înseamnă că f îşi schimbă monotonia şi atunci $f(x) \leq f(0) = 1$ cu egalitate pentru $x = 0$ şi (1.6) este demonstrată. ⊞

Continuăm prin prezentarea unei forme mai generale ale inegalităţii lui Bernoulli, adică

Teorema 1.5.3. *Dacă $\{p_1, p_2, ..., p_n\} \subset (-\infty, 0)$ sau $\{p_1, p_2, ..., p_n\} \subset (1, +\infty)$, iar $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset [0, +\infty)$ sau $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset (-1, 0]$, $n \geq 1$, atunci*

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{p_i} \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i,$$

cazul de egalitate având loc dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Demonstraţie. Se observă că în fiecare din cazurile ipotezei avem $p_i x_i \leq 0 (1 \leq i \leq n)$. Dacă pentru un anume $i \in \{1, 2, ..., n\}$ avem $p_i x_i \leq -1$, atunci inegalitatea se verifică uşor deoarece avem

$$0 \geq 1 + p_i x_i \geq 1 + p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n.$$

Să considerăm cazul în care $p_i x_i \in (-1, 0], (1 \leq i \leq n)$. Folosind (1.5) şi forma simplificată a inegalităţii lui Bernoulli (1.4), avem

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{p_i} \geq \prod_{i+1}^{n}(1+p_i x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i,$$

ceea ce încheie demonstraţia. Datorită cazului de egalitate din (1.4) pentru a avea egalitate, trebuie ca

$$p_1x_1 = p_2x_2 = ... = p_nx_n = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n = 0.$$

$\boxplus$

Comentariu. Enunţăm aici şi o altă formă a inegalităţii lui Bernoulli, dar nu ne vom ocupa de demonstrarea ei.
"*Fie* $p_i > 0$, *cu* $\sum_{i=1}^n p_i = 1 (1 \le i \le n)$, şi $x_i \in (-1, 0] (1 \le i \le n)$ *sau* $x_i \in [0, +\infty)(1 \le i \le n)$, $n \ge 2$, atunci

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_i)^{p_i} \le 1 + \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i."$$

$\oplus$

1.6 Inegalitatea lui Cebîşev

Continuăm cu o inegalitate deasemenea clasică şi anume

Teorema 1.6.1. *Dacă* $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$, $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$*(în principiu seturile de numere trebuie să aibă aceeaşi monotonie), atunci*

$$n\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right) \ge \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right).$$

Demonstraţie. Arătăm mai întâi că $a_1b_n + a_2b_{n-1} + ... + a_nb_1 \le S \le a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$, unde $S = a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + ... + a_nb_{i_n}$, iar numerele $i_1, i_2, ..., i_n$ sunt $1, 2, ..., n$ eventual într-o altă ordine. Începem demonstraţia prin observaţia că dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \ge b, c \ge d$, atunci $ac + bd \ge ad + bc$, relaţie echivalentă cu $(a-b)(c-d) \ge 0$. Acum dacă în S avem termenii a_lb_q şi a_kb_p pentru care $l < k$ şi $q > p$, atunci $b_p \ge b_q$ şi schimbând b_q cu b_p rezultă

$$S' = a_1b_{i_1} + ... + a_lb_p + ... + a_kb_q + ... \ge S$$

şi analog se repetă raţionamentul. Deci conform acestui rezultat putem spune că $\max S = \sum_{i=1}^n a_ib_i$. De aici se pot enunţa inegalităţile

$$\sum_{i=1}^n a_ib_1 \ge a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_1 \geq a_1 b_2 + a_2 b_3 + \ldots + a_n b_1$$

...

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_1 \geq a_1 b_n + a_2 b_1 + \ldots + a_n b_{n-1},$$

de unde prin adunare membru cu membru se obţine inegalitatea lui Cebîşev. ⊞

Comentariu. (i). Cazul de egalitate are loc dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ sau $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$.
(ii). Dacă mulţimile de numere nu au aceeaşi monotonie inegalitatea Cebîşev devine:

$$n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

(iii). O generalizare a inegalităţii o reprezintă tocmai forma ponderată a inegalităţii lui Cebîşev, a cărei demonstraţie nu o vom prezenta aici, şi anume

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)(p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2 + \ldots + p_n a_n b_n)$$
$$\geq (p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_n a_n)(p_1 b_1 + p_2 b_2 + \ldots + p_n b_n),$$

unde $p_1, p_2, \ldots, p_n > 0$. ⊕

1.7 Inegalitatea lui Jensen

Începem aici prin a defini ce înseamnă o funcţie convexă respectiv concavă, pentru ca mai apoi să prezentăm inegalitatea lui Jensen, care se bazează pe aceste cunoştinţe.

Definiţie. 1. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este interval. Vom spune că f este convexă (concavă) pe I dacă oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$ şi oricare ar fi $t \in [0, 1]$ avem*

$$f[tx_1 + (1-t)x_2] \leq (\geq) tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Continuăm cu inegalitatea lui Jensen, şi anume